

Список определений и формулировок по курсу «Алгебра», 4 модуль,
2020/2021 учебный год
Версия 1. 21 мая 2021 г.

4-й модуль

1. Сформулируйте утверждение о связи размерностей ядра и образа линейного отображения.
2. Дайте определения собственного вектора и собственного значения линейного оператора.
3. Дайте определения характеристического уравнения и характеристического многочлена квадратной матрицы.
4. Сформулируйте утверждение о связи характеристического уравнения и спектра линейного оператора.
5. Дайте определение собственного подпространства.
6. Дайте определения алгебраической и геометрической кратности собственного значения. Какое неравенство их связывает?
7. Каким свойством обладают собственные векторы линейного оператора, отвечающие различным собственным значениям?
8. Сформулируйте критерий диагональности матрицы оператора.
9. Сформулируйте критерий диагонализуемости матрицы оператора с использованием понятия геометрической кратности.
10. Дайте определение жордановой клетки. Сформулируйте теорему о жордановой нормальной форме матрицы оператора.
11. Выпишите формулу для количества жордановых клеток заданного размера.
12. Сформулируйте теорему Гамильтона—Кэли.
13. Дайте определение корневого подпространства.
14. Дайте определение минимального многочлена линейного оператора.
15. Дайте определение инвариантного подпространства.
16. Дайте определение евклидова пространства.
17. Выпишите неравенства Коши—Буняковского и треугольника.
18. Дайте определения ортогонального и ортонормированного базисов.
19. Дайте определение матрицы Грама.
20. Выпишите формулу для преобразования матрицы Грама при переходе к новому базису.
21. Как меняется определитель матрицы Грама (грамиан) при применении процесса ортогонализации Грама—Шмидта?
22. Сформулируйте критерий линейной зависимости с помощью матрицы Грама.
23. Дайте определение ортогонального дополнения.
24. Дайте определения ортогональной проекции вектора на подпространство и ортогональной составляющей.
25. Выпишите формулу для ортогональной проекции вектора на подпространство, заданное как линейная оболочка данного линейно независимого набора векторов.
26. Выпишите формулу для вычисления расстояния с помощью определителей матриц Грама.
27. Дайте определение сопряженного оператора в евклидовом пространстве.
28. Дайте определение самосопряженного (симметрического) оператора.
29. Как найти матрицу сопряженного оператора в произвольном базисе?
30. Каким свойством обладают собственные значения самосопряженного оператора?
31. Что можно сказать про собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие разным собственным значениям?

32. Сформулируйте определение ортогональной матрицы.
33. Сформулируйте определение ортогонального оператора.
34. Сформулируйте критерий ортогональности оператора, использующий его матрицу.
35. Каков канонический вид ортогонального оператора? Сформулируйте теорему Эйлера.
36. Сформулируйте теорему о существовании для самосопряженного оператора базиса из собственных векторов.
37. Сформулируйте теорему о приведении квадратичной формы к диагональному виду при помощи ортогональной замены координат.
38. Сформулируйте утверждение о QR-разложении.
39. Сформулируйте теорему о сингулярном разложении.
40. Сформулируйте утверждение о полярном разложении.
41. Дайте определение сопряженного пространства.
42. Выпишите формулу для преобразования координат ковектора при переходе к другому базису.
43. Дайте определение взаимных базисов.
44. Дайте определение биортогонального базиса.
45. Что можно сказать про ортогональное дополнение к образу сопряженного оператора?
46. Сформулируйте теорему Фредгольма и альтернативу Фредгольма.